Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula 09

Bases e dimensão

Definição.—Seja V é um espaço linear e X um conjunto gerador de V. Se X é linearmente independente então X diz-se uma **base** de V.

Uma **base ordenada** de V é um n-úplo $(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$ em que $\{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n\}$ é uma base de V. (Note-se que uma base $\{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n\}$, de V, determina $n!$ bases ordenadas distintas.)

Teorema.—*Se $V = L_V(X)$ então, existe $Y \subset X$ tal que Y é uma base de V. Desta forma todo o espaço linear tem uma base.*

Bases e dimensão

Teorema.—*Seja V um espaço linear. Se $\{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n\}$ e $\{\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_m\}$ são bases de V então, $m = n$. Ou seja as bases de V têm todas a mesma quantidade de elementos.*

Definição.—Seja V é um espaço linear. A **dimensão** de V, que se denota $\dim(V)$, é o número de elementos que integram uma qualquer base de V.

Convencionalmente $\dim(\{\mathbb{O}\}) = 0$.

Tem-se então que $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathbb{K}^{m \times n}) = mn$ e $\dim(\mathbb{K}_n[x]) = n + 1$.

Bases e dimensão

Teorema.—*Seja V é um espaço linear. Se $X \subset V$ é linearmente independente então, existe uma base Y tal que $X \subset Y$.* ***(Ou seja, todo o conjunto linearmente independente pode ser completado até se obter uma base.)***

Teorema.—*Seja V é um espaço linear com dimensão n. Se $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset V$ e $k > n$ então, o conjunto $\{x_1, \ldots, x_k\}$ é **linearmente dependente**.* ***(Num espaço de dimensão n, mais que n vectores são necessariamente linearmente dependentes.)***

Teorema.—*Seja V é um espaço linear com dimensão n. Se $X \subset V$ é linearmente independente e tem n vectores então, X é uma base de V.* ***(Num espaço de dimensão n, quaisquer n vectores linearmente independentes constituem uma base.)***

Bases e dimensão

Teorema.—*Se $W \leqslant V$ e V é um espaço de dimensão finita então, W é um espaço de dimensão finita e* $\dim(W) \leq \dim(V)$. *Se W é um subespaço não-trivial de V então,* $1 \leq \dim(W) < \dim(V)$.

Teorema.—*Se V é um espaço linear e $X = \{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}$ é uma base de V então, qualquer $\mathrm{x} \in V$ pode ser escrito de forma única como uma combinação linear dos vectores em X.*

Isto sucede porque se $\mathrm{u}_1, \ldots \mathrm{u}_k$ são linearmente independentes então:

$$\alpha_1 \mathrm{u}_1 + \cdots + \alpha_k \mathrm{u}_k = \beta_1 \mathrm{u}_1 + \cdots + \beta_k \mathrm{u}_k \text{ sse } \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_k = \beta_k$$

Teorema.—*Seja A^* uma matriz que se obtém de A através da aplicação de uma sequência de operações elementares. Nestas condições* $\mathrm{EL}(A) = \mathrm{EL}(A^*)$. *Em particular, se A^* é uma matriz em escada de linhas então as linhas com pivôs constituem uma base para* $\mathrm{EL}(A^*)$ *(e também para* $\mathrm{EL}(A)$*).*

Em certos casos interessa-nos obter uma base constituída por linhas da matriz original.

Teorema.—*Seja A^* uma matriz em escada de linhas que se obtém de A através da aplicação de uma sequência de operações elementares. Nestas condições, as linhas de A que (a menos de eventuais trocas de linhas) correspondam às linhas de A^* com pivôs, são uma base de* $\mathrm{EL}(A)$.

Exemplos

Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem-se que:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_1 + L_2 \to L_2]{} \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_2 + L_3 \to L_3]{} \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, tanto o conjunto $\{(1,1,0,-1),(0,1,0,1)\}$ correspondendo às linhas com pivôs na matriz final, como o conjunto $\{1,2,0,0),(1,1,0,-1)\}$contendo as linhas que na matriz inicial correspondem às linhas com pivôs na matriz final, são bases de $\mathrm{EL}(A)$.

Teorema.—*Seja A^* uma matriz em escada de linhas que se obtém de A através da aplicação de uma sequência de operações elementares. Nestas condições, as colunas de A que correspondem às colunas de A^* que contém os pivôs são uma base de* $\mathrm{EC}(A)$.

Observe-se que **o método de eliminação de Gauss não preserva o espaço das colunas**, pelo que já não é possível fazer escolhas na matriz final.

Exemplos

Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_1 + L_2 \to L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_2 + L_3 \to L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, tanto o conjunto $\{(0,1,1), (1,2,1)\}$ correspondendo às colunas com pivôs na matriz final, é uma base de $\mathrm{EC}(A)$.

Problema 3.8.— Considere o subespaço linear de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}.$$

(a) Determine uma base ordenada $\boldsymbol{B}$ de W, e indique a dimensão de W.

(b) Verifique que o vetor $\mathrm{v} = (1, 2, 1)$ pertence a W, e determine o vector de coordenadas de v na base $\boldsymbol{B}$.

Problema 3.9.— Seja W o subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z - w = 0 \wedge -x + z = 0\}.$$

(a) Determine uma base ordenada B para o subespaço W, e indique a dimensão de W.

(b) Verifique que o vetor $\mathrm{v} = (1, 2, 1, 1)$ pertence a W, e determine o vetor v_B (o vector de coordenadas de v na base B.

Relação entre as dimensões dos espaços das linhas e das colunas de uma matriz

Teorema.—Seja $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ uma matriz. Tem-se que a dimensão do espaço das linhas de A coincide com a dimensão do espaço das colunas de A e ambas coincidem com a característica de A. Assim, tem-se que:

$$\mathrm{car}(A) = \dim(\mathrm{EC}(A)) = \dim(\mathrm{EL}(A))$$

Problema 3.16.— Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

e considere as seguintes afirmações:

I As linhas de A formam um conjunto linearmente independente;

II As colunas de A formam um conjunto linearmente independente;

III A característica de A é igual a 3;

IV O sistema de equações lineares $A\mathrm{u} = \mathrm{b}$ tem uma única solução, qualquer que seja $\mathrm{b} \in \mathbb{R}$.

Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

A) I e II; B) I, II e III; C) III; D) Todas.

PROBLEMA 3.21.— Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira para

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$$

(a) V não é subespaço linear de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$ é uma base de V.

(c) $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 3, 1)\}$ é uma base de V.

(d) $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$ é uma base de V.

Nulidade de uma matriz

Definição.—*Seja* $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ *uma matriz. A* ***nulidade*** *de* A*, que se denota* $\mathrm{nul}(A)$*, é a dimensão do núcleo de* A.

Teorema.—*Seja* $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ *uma matriz. Tem-se que:*

$$n = \mathrm{car}(\mathrm{A}) + \mathrm{nul}(\mathrm{A})$$

Ou seja, a soma da nulidade com a característica de uma matriz iguala o número das suas colunas.

Problema 3.22.— Seja A uma matriz tal que $\{(1,1,0,0),(1,0,2,1)\}$ é uma base do núcleo $\mathrm{Nuc}(A)$ da matriz A. Considere as afirmações seguintes:

(a) O vetor $x = (-5,-2,3,-2)$ é solução do sistema $A\mathrm{x} = \mathbb{0}$;

(b) A dimensão do espaço das colunas $\mathrm{EC}(A)$ da matriz A é 2;

(c) A matriz A tem 4 colunas;

(d) $\mathrm{Nuc}(A) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2z = y \wedge z = w\}$.

A lista completa das afirmações correctas é:

A) (a), (b) e (c) B) (b), (c) e (d) C) (b) e (d) D) (b) e (c)