Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula 08

Subespaços de um espaço linear (exemplos)

O núcleo de uma matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, que se denota $\mathrm{Nuc}(A)$ é o conjunto de soluções do sistema homogéneo $A\mathrm{x} = \mathbb{O}$. Tem-se que:

$$\mathrm{Nuc}(A) \leqslant \mathbb{R}^{n\times 1}$$

ou, identificando vectores coluna com n-úplos:

$$\mathrm{Nuc}(A) \leqslant \mathbb{R}^{n}$$

Como $A\mathbb{O} = \mathbb{O}$ tem-se que $\mathbb{O} \in \mathrm{Nuc}(A)$. Por outro lado, se $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{Nuc}(A)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ então $A(\alpha\mathrm{x} + \beta\mathrm{y}) = \alpha A\mathrm{x} + \beta A\mathrm{y} = \mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O}$. Assim, $\alpha\mathrm{x} + \beta\mathrm{y} \in \mathrm{Nuc}(A)$.

Problema 3.1.— Considere os vectores $v_1 = (2, 1, 0, 3)$, $v_2 = (3, -1, 5, 2)$ e $v_3 = (-1, 0, 2, 1)$. Quais dos vetores seguintes pertencem a $L_V(\{v_1, v_2, v_3\})$?

a) $(2, 3, -7, 3)$; b) $(0, 0, 0, 0)$; c) $(1, 1, 1, -1)$; d) $(-4, 6, -13, 4)$.

Problema 3.2.— Quais dos seguintes conjuntos com as operações usuais de adição vectorial e multiplicação por escalares reais são subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$?

(a) O conjunto de vectores da forma $(a, 0, 0)$ com a real.

(b) O conjunto de vectores da forma $(a, 1, 1)$ com a real.

(c) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

(d) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

(e) O conjunto de vectores da forma (a, b, c) com $b = a + c + 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 3.4.— Sempre que b pertencer ao espaço das colunas de A escreva-o como combinação linear dessas colunas.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$, $\quad \mathrm{b} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$;

b) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$;

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Definição.—Seja V um espaço linear sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que V é um **espaço linear de dimensão finita** se existe um conjunto finito de vectores $\{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n\} \subset V$ tal que $V = L_V(\{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n\})$, ou seja, qualquer vector em V é uma combinação linear dos vectores $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n$.

No curso consideraremos apenas espaços de dimensão finita.

Espaços lineares de dimensão finita (exemplos)

Os espaços $\mathbb{K}^n$ são espaços lineares de dimensão finita.

Tem-se $\mathbb{K}^n = L_{\mathbb{K}^n}(\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n\})$ onde:

$$\mathrm{e}_1 = (1,0,\dots,0), \mathrm{e}_2 = (0,1,\dots,0), \dots, \mathrm{e}_n = (0,0,\dots,1)$$

Com efeito:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha_1(1,0,\dots,0) + \alpha_2(0,1,\dots,0) + \cdots + \alpha_n(0,0,\dots,1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{e}_i$$

Espaços lineares de dimensão finita (exemplos)

Os espaços $\mathbb{K}^{m\times n}$ são espaços lineares de dimensão finita.

Tem-se $\mathbb{K}^{m\times n} = L_{\mathbb{K}^{m\times n}}(\{B^{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\})$ onde $B^{i,j}$ é a matriz que se obtém da matriz nula colocando 1 na posição (i, j).

No caso de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, por exemplo, tem-se:

$$B^{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = aB^{1,1} + bB^{1,2} + cB^{2,1} + dB^{2,2}$$

Espaços lineares de dimensão finita (exemplos)

O conjunto dos polinómios de grau $\leq n$, numa variável, x, e com coeficientes em $\mathbb{K}$, denota-se $\mathbb{K}_n[x]$. Tem-se que $\mathbb{K}_n[x] \leqslant {}^{\mathbb{K}}\mathbb{K}$.

O espaço $\mathbb{K}_n[x]$ tem dimensão finita. Tem-se:

$$\mathbb{K}_n[x] = L_{\mathbb{K}_n[x]}(\{x^0, x^1, \ldots, x^n\})$$

Este facto é completamente trivial pois, tendo em conta a definição das operações de adição de funções e multiplicação de um escalar por uma função tem-se que:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = (a_0 \cdot x^0) + (a_1 \cdot x^1) + \cdots + (a_n \cdot x^n)$$

Espaços lineares de dimensão finita (exemplos)

O conjunto dos polinómios de grau arbitrário, numa variável, x, e com coeficientes em $\mathbb{K}$, denota-se $\mathbb{K}[x]$. Tem-se que $\mathbb{K}[x] \leqslant {}^{\mathbb{K}}\mathbb{K}$.

O espaço $\mathbb{K}[x]$ **não tem dimensão finita**.

Se se tivesse $\mathbb{K}[x] = L_{\mathbb{K}[x]}(\{p_1(x), \ldots, p_k(x)\})$ então, sendo n o máximo dos graus dos $p_i(x)$ $(i = 1,\ldots,k)$ qualquer combinação linear daqueles vectores terá grau no máximo n. Isto significa que, por exemplo, x^{n+1} não é combinação linear dos $p_i(x)$, contradizendo $\mathbb{K}[x] = L_{\mathbb{K}[x]}(\{p_1(x), \ldots, p_k(x)\})$.

No entanto:

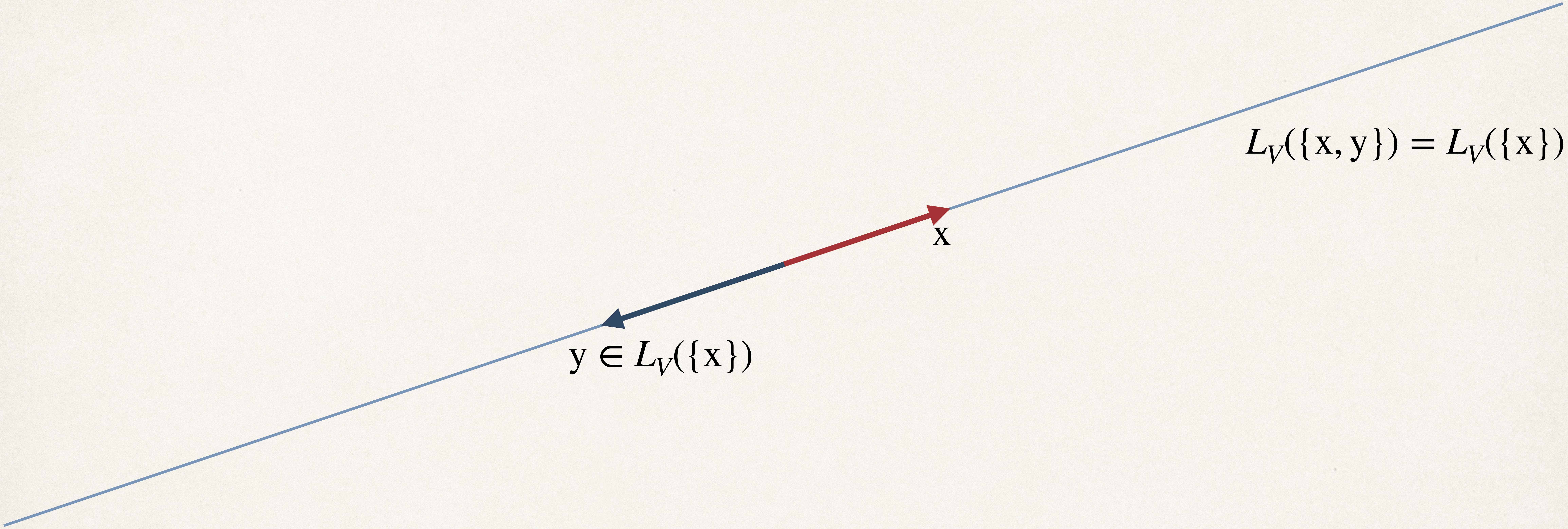
$$\mathbb{K}[x] = L_{\mathbb{K}[x]}\left(\{x^0, x^1, x^2, \ldots\}\right)$$

Recorde-se que V é um espaço de dimensão finita se $V = L_V(X)$ para algum $X \subset V$, finito.

Uma interessante questão é a seguinte:

Se V é um espaço de dimensão finita, qual é a menor cardinalidade possível de um conjunto gerador de V?

Note-se que se $x \in X$ e $x \in L_V(X \backslash \{x\})$ então $L_V(X) = L_V(X \backslash \{x\})$.



Assim, se procuramos conjuntos geradores de cardinalidade mínima, **temos que evitar conjuntos onde elementos se podem escrever como combinações lineares de outros**.

Definição.—Sejam, V um espaço linear e $x_1, \ldots, x_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ **é linearmente dependente**, ou que os vectores $x_1, \ldots, x_n$ **são linearmente dependentes** se existe algum $i \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $x_i \in L_V(\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_i\})$, ou seja, se algum vector x_i se pode escrever como combinação linear dos restantes.

Um conjunto de vectores que não é linearmente dependente diz-se **linearmente independente**.

Teorema.—Sejam V um espaço linear e $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$. Tem-se que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é **linearmente dependente** se existem escalares, **não todos nulos**, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \mathbb{0}$$

caso contrário, ou seja, se a única forma de obter $\mathbb{0}$ como combinação linear dos vectores $x_1, \ldots, x_n$ for, considerando os coeficientes da combinação linear todos nulos, o conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ diz-se **linearmente independente**.

Por exemplo: como $1\mathbb{0} = \mathbb{0}$, o conjunto $\{\mathbb{0}\}$ é linearmente dependente. Por outro lado, se $x \neq \mathbb{0}$ tem-se que $\alpha x = \mathbb{0}$ se e só se $\alpha = 0$ e assim, se $x \neq \mathbb{0}$ o conjunto $\{x\}$ é linearmente independente.

Exemplo

Consideremos os vectores $(1,1,-1), (1,0,1), (1,2,-1) \in \mathbb{R}^3$. Serão estes vectores linearmente dependentes ou linearmente independentes?

Como podemos identificar vectores de $\mathbb{R}^3$ com colunas em $\mathbb{R}^{3\times 1}$, o problema consiste em determinar em que condições a coluna nula é combinação linear das colunas $[1 \quad 1 \quad -1]^\top$, $[1 \quad 0 \quad 1]^\top$ e $[1 \quad 2 \quad -1]^\top$, ou seja em determinar a natureza do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Se ele for **determinado** os vectores são **linearmente independentes**, se o sistema for **indeterminado** então os vectores são **linearmente dependentes**.