Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula 03

Equações lineares [definição]

Uma **equação linear** em $\mathbb{K}$ é uma equação que pode ser escrita na forma:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta \qquad (*)$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{K}$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são letras (as *variáveis*).

Também se diz que a equação (*) é uma *equação linear nas variáveis* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Observação.—A equação não tem que estar exactamente na forma (*), **basta que seja equivalente a uma equação na forma (*) para que se possa classificar como linear**.

Conjunto solução de uma equação linear

O **conjunto solução** da equação linear $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$ é o conjunto:

$$\{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mid \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_n \xi_n = \beta\}$$

ou seja, **uma solução** da equação $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$ é um n-úplo $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ tal que: substituindo, em $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$, o escalar ξ_1 no lugar de x_1, ξ_2 no lugar de x_2, ... e ξ_n no lugar de x_n, obtemos uma igualdade verdadeira.

Equações lineares [exemplos]

$0 = \beta$

Trata-se de uma equação. Na realidade é uma equação em n variáveis, para qualquer n, já que é equivalente a $0x_1 + \cdots + 0x_n = \beta$.
Se $\beta = 0$ a equação é satisfeita por qualquer n-úplo (pressupondo que a estamos a considerar como uma equação em n variáveis).
Se $\beta \neq 0$ a equação não tem soluções (diz-se **impossível**).

$\alpha x = \beta$

Trata-se de uma equação na variável x. Se $\alpha = 0$ caímos no caso precedente. Caso contrário a equação possui uma única solução que é $x = \beta/\alpha$.

$\alpha_1 x + \alpha_2 y = \beta$

Trata-se de uma equação nas variáveis x e y. Se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, caímos no primeiro caso. Caso contrário, no contexto dos números reais, o conjunto solução desta equação corresponde a uma recta no plano.

$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = \beta$

Trata-se de uma equação nas variáveis x, y e z. Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, caímos no primeiro caso. Caso contrário, no contexto dos números reais, o conjunto solução desta equação corresponde a um plano no espaço.

Pode uma recta no espaço ser caracterizada por equações lineares?

Assim, a resposta é **sim**, desde que *envolvamos duas equações lineares*.

Ou seja desde que consideremos um **sistema de equações lineares**.

Sistemas de equações lineares [definição]

Um sistema de equações lineares em n variáveis apresenta-se na forma:

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{2,1}x_1 + \cdots + \alpha_{2,n}x_n = \beta_2 \\ \qquad \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1m,n}x_n = \beta_m \end{cases} \qquad (\Sigma)$$

O sistema de equações lineares (Σ) é assim composto por m equações lineares em n variáveis.

Observação.—Para o fim de resolver um sistema de equações é conveniente apresentar **todas as equações com a mesma ordenação das variáveis**, isolando o termo que não contém nenhuma variável (o termo independente) no segundo membro.

Sistemas de equações lineares

O conjunto solução do sistema Σ, que se denota $\mathrm{Sol}(\Sigma)$, consiste nos n-úplos $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ **que são uma solução de todas as equações do sistema**. Ou seja, se Σ consiste nas equações $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_m$ então,

$$\mathrm{Sol}(\Sigma) = \mathrm{Sol}(\mathfrak{E}_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Sol}(\mathfrak{E}_m).$$

Relativamente à existência de soluções, os sistemas de equações lineares podem ser:

Possíveis e determinados	Quando o sistema possui uma única solução.
Possíveis e indeterminados	Quando o sistema possui várias soluções.
Impossíveis	Quando o sistema não tem soluções.

Vamos descrever um algoritmo que nos permitirá resolver **de forma mecânica e sistemática** qualquer sistema de equações lineares num qualquer número de variáveis, envolvendo um qualquer número de equações.

Mas antes de o algoritmo poder ser posto em acção, é necessário que o sistema seja traduzido numa forma matricial.

Representação matricial de um sistema de equações lineares

$$(\Sigma)\ \begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{2,1}x_1 + \cdots + \alpha_{2,n}x_n = \beta_2 \\ \qquad\vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1m,n}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

Vector coluna dos termos independentes

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} & \beta_1 \\ \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,n} & \beta_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,n} & \beta_m \end{array}\right]$$

Matriz aumentada

Representação matricial de um sistema de equações lineares

$$
\begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{ccc|c}
\alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} & \beta_1 \\
\alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,n} & \beta_2 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,n} & \beta_m
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\text{Equação 1} \\
\text{Equação 2} \\
\\
\text{Equação } m
\end{array}
\\
\begin{array}{ccc}
\uparrow & \qquad\qquad & \uparrow \\
x_1 & & x_n
\end{array}
&
\end{array}
$$

Se A é a matriz dos coeficientes do sistema e b é o vector coluna dos termos independentes do sistema então a matriz aumentada é representada por $[A \mid \mathrm{b}]$.

Representação matricial de um sistema de equações lineares

É importante ter em mente o seguinte facto:

Se a matriz dos coeficiente de um sistema, Σ, é $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ então o número de linhas de A, ou seja, m, corresponde ao número de equações de Σ e, o número de colunas, n, ao número de variáveis.

Representação matricial de um sistema de equações lineares [exemplo]

Sistema

$$\begin{cases} -x + w = -1 \\ x + y + z + w = 0 \\ x - y + w = 1 \\ y - z + w = -2 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Coluna dos termos independentes

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Coluna das variáveis

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

ou, **fixando uma diferente ordenação para as variáveis**:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Escrita do sistema a partir da matriz aumentada e de uma sequência de variáveis

Reciprocamente, conhecida uma matriz aumentada e a sequência das variáveis do sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} & \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,n} & \beta_m \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

podemos obter o sistema que ela representa:

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{2,1}x_1 + \cdots + \alpha_{2,n}x_n = \beta_2 \\ \qquad \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1m,n}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Escrita do sistema a partir da matriz aumentada e de uma sequência de variáveis [exemplo]

Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Coluna das variáveis

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Sistema

$$\begin{cases} u + v - w = 0 \\ u - v + w = 0 \\ -u + v + w = 0 \end{cases}$$

Equivalência entre sistemas e equações matriciais

Identificamos os n-úplos $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$ com vectores coluna $\begin{bmatrix}\xi_1 & \cdots & \xi_n\end{bmatrix}^\top \in \mathbb{K}^{n\times 1}$.

Tendo em conta esta identificação, é fácil constatar que:

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{2,1}x_1 + \cdots + \alpha_{2,n}x_n = \beta_2 \\ \qquad\vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1m,n}x_n = \beta_m \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A\mathrm{x} = \mathrm{b}$$

ou seja, **o sistema é equivalente à equação matricial** $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, onde A é a matriz de coeficientes do sistema, b é o vector coluna dos termos independentes e, x é o **vector coluna das variáveis** i.e., $\mathrm{x} = \begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}^\top$.

Equivalência entre sistemas e equações matriciais

Com efeito:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n \\ \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{m,n}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

o que, **tendo em conta o critério de igualdade de matrizes**, equivale ao sistema:

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{2,1}x_1 + \cdots + \alpha_{2,n}x_n = \beta_2 \\ \qquad\vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1m,n}x_n = \beta_m \end{cases}$$