Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula 02

Potências de uma matriz quadrada [definição]

Se $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, ou seja se A é uma matriz quadrada, podemos fazer corresponder a cada $n \in \mathbb{N}$ a n-ésima potência de A que se denota A^n, de acordo com o seguinte:

$$A^0 = \mathbb{I} \qquad A^{n+1} = AA^n$$

ou seja: $A^0 = \mathbb{I}$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, $A^4 = AAAA$, etc.

Dados, um polinómio $p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ e uma matriz quadrada A designamos por $p(A)$ a matriz:

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 \mathbb{I}$$

Combinações lineares e produto de matrizes

Definição.—Sejam $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n \in \mathbb{K}^{1\times n}$ ou $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. Uma *combinação linear* dos vectores $\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n$ é uma soma do tipo $\alpha_1\mathrm{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathrm{u}_n$ onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. (Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dizem-se os *coeficientes da combinação linear*.)

Teorema.—Sejam $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ e $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$. Tem-se que $(AB)_{i,*} = A_{i,1}B_{1,*} + A_{i,2}B_{2,*} + \cdots A_{i,p}B_{p,*}$ e $(AB)_{*,j} = B_{1,j}A_{*,1} + B_{2,j}A_{*,2} + \cdots + B_{p,j}A_{*,p}$. Ou seja, *a i-ésima linha de AB é a combinação linear das linhas de B cujos coeficientes são as entradas da i-ésima linha de A*; e, *a j-ésima coluna de AB é a combinação linear das colunas de A cujos coeficientes são as entradas da j-ésima coluna de B*.

Combinações lineares e produto de matrizes [exemplo]

Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \\ \eta & \theta \end{bmatrix}$. Determinar $(AB)_{1,*}$ e $(AB)_{*,2}$ como combinações lineares das linhas de B e das colunas de A, respectivamente.

$$(AB)_{1,*} = a \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \gamma & \delta \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} \eta & \theta \end{bmatrix}$$

$$(AB)_{*,2} = \beta \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

Matriz transposta [definição e exemplo]

Definição.—Seja $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ um matriz. A *transposta* de A é a matriz $A^\top \in \mathbb{K}^{n\times m}$ que se caracteriza através da seguinte relação:

$$(A^\top)_{i,j} = A_{j,i}$$

Mais informalmente, as linhas (resp. colunas) de $A^\top$ são as colunas (resp. linhas) de A.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades da transposição

(1) $A^{\top\top} = A$

(2) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$

(3) $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$

(4) $(AB)^\top = B^\top A^\top$

Problema 1.1.— Algumas das identidades abaixo são sempre verdadeiras outras nem sempre são verdadeiras e outras não fazem sentido. Classifique cada uma delas relativamente a estas três categorias.

1. $A + \alpha B = \alpha A + B$;
2. $\alpha(\beta + A) = \alpha\beta + \alpha A$
3. $\alpha(A - B) = \alpha A - \alpha B$
4. $0A = \mathbb{0}$;
5. $A - A^\top = \mathbb{0}$;
6. $\alpha(A - B) = \alpha(A + B) - \alpha B$.

PROBLEMA 1.5.— Sejam $A, B, D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $E \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Determine quais das seguintes expressões matriciais estão bem definidas, e nesses casos, indique o tipo da matriz resultante.

(a) BA (b) $AC + D$ (c) $AE + B$ (d) $AB + B$
(e) $E(A + B)$ (f) $E(AC)$ (g) $E^\top A$ (h) $(A^\top + E)D$.

Problema i.7.— Resolva (em ordem a $\boldsymbol{X}$), em função de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, a equação matricial:

$$3\left(\boldsymbol{X} + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right) = 5\left(\boldsymbol{X} - \frac{3}{4}\boldsymbol{B}\right).$$

Problema i.11.— Mostre que $(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}))^\top = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{A}^\top$.

Problema 1.15.— Consideremos a matriz complexa,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^2, A^3, A^4 e obtenha uma exprssão geral para A^n, onde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Problema 1.17.— Seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e B a matriz cujas colunas são, respetivamente, os vectores: © ESD

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que

$$A b_1 = b_4, \quad A(b_2 - b_3) = b_1, \quad A(b_2 + b_3) = b_4, \quad A b_4 = b_3.$$

Determine a matriz AB.

Problema 1.21.— Sejam $\mathrm{x} = [a\ b\ c]$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix},$$

onde $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

(a) Mostre que $A^2 = \mathrm{x}^\top \mathrm{x} - \mathbb{1}$.

(b) Prove que $A^3 = A$.

(c) Determine A^4 em função de x.

Problema 1.22.— Seja $E \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\operatorname{tr}(E) = 0$.

(a) Mostre que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $E^2 = \lambda \mathbb{1}$.

(b) Use (a) para mostrar que, dadas matrizes $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ se tem:

$$(AB - BA)^2 C = C(AB - BA)^2.$$

Problema 1.24.— Consideremos as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

(a) Prove que

$$AB = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\phi) & \sin(\theta+\phi) \\ -\sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{bmatrix}.$$

(b) Prove que

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

(Use indução.)