Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula 23

Exercício 1.

Estabeleça as seguintes desigualdades:

1. $$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right)$$
2. $$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \beta_i^2\right), \text{ com } \lambda_i > 0.$$

Exercício 2.

Seja V um espaço euclidiano. Mostre que se $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ são ortogonais entre si então, o mesmo sucede com os vectores $\lambda_1\mathrm{v}_1, \ldots, \lambda_n\mathrm{v}_n$.

Exercício 3.

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é ortogonal se $AA^\top = \mathbb{I}$. Considerando o produto interno canónico em $\mathbb{R}^n$ mostre que se A é uma matriz ortogonal então,

$$\langle A\mathrm{x}, A\mathrm{y}\rangle = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle, \quad \text{para quaisquer } \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Conclua ainda que:

$$\|\mathrm{x}\| = \|A\mathrm{x}\|, \quad \text{para qualquer } \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Exercício 4.

Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz tal que $\operatorname{car}(A) = n$.

(a) Mostre que a matriz $A^\top A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica.

(b) Mostre que $\mathrm{x}^\top (A^\top A)\mathrm{x} > 0$, para qualquer $\mathrm{x} \neq \mathbb{O}$ em $\mathbb{R}^n$.

Conclua que a relação

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \mathrm{x}^\top (A^\top A)\mathrm{y}$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

Exercício 5.

(a) Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno canónico. Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vector (1,2,3).

(b) Considere $\mathbb{R}^{2\times 2}$ com o produto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\top B)$. Determine uma base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que inclua três matrizes simétricas. Em alternativa mostre que isso não é possível.

Exercício 6.

Estabeleça as seguintes propriedades do complemento ortogonal ($W_1, W_2 \leq V$):

(a) Se $W_1 \subset W_2$ então $W_2^\perp \subset W_1^\perp$;

(b) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$;

(c) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$;

Exercício 7.

Sejam V um espaço euclidiano e $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$ uma base ortonormada de V. Estabeleça as seguintes relações:

(a) $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{x}, \mathrm{v}_i \rangle \langle \mathrm{y}, \mathrm{v}_i \rangle$ (igualdade de Parseval)

(b) $\|\mathrm{x}\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{x}, \mathrm{v}_i \rangle^2$ (igualdade de Bessel)

Exercício 8.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica e considere em $\mathbb{R}^n$ o produto interno canónico. Mostre que se $\mathrm{x} \in E_A(\lambda)$, $\mathrm{y} \in E_A(\mu)$ e $\lambda \neq \mu$ então $\mathrm{x} \perp \mathrm{y}$.

Sugestão. Exprima o número $\mathrm{x}^\top A\mathrm{y}$ de duas formas diferentes (usando $A = A^\top$) e compare essas formas