Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula 22

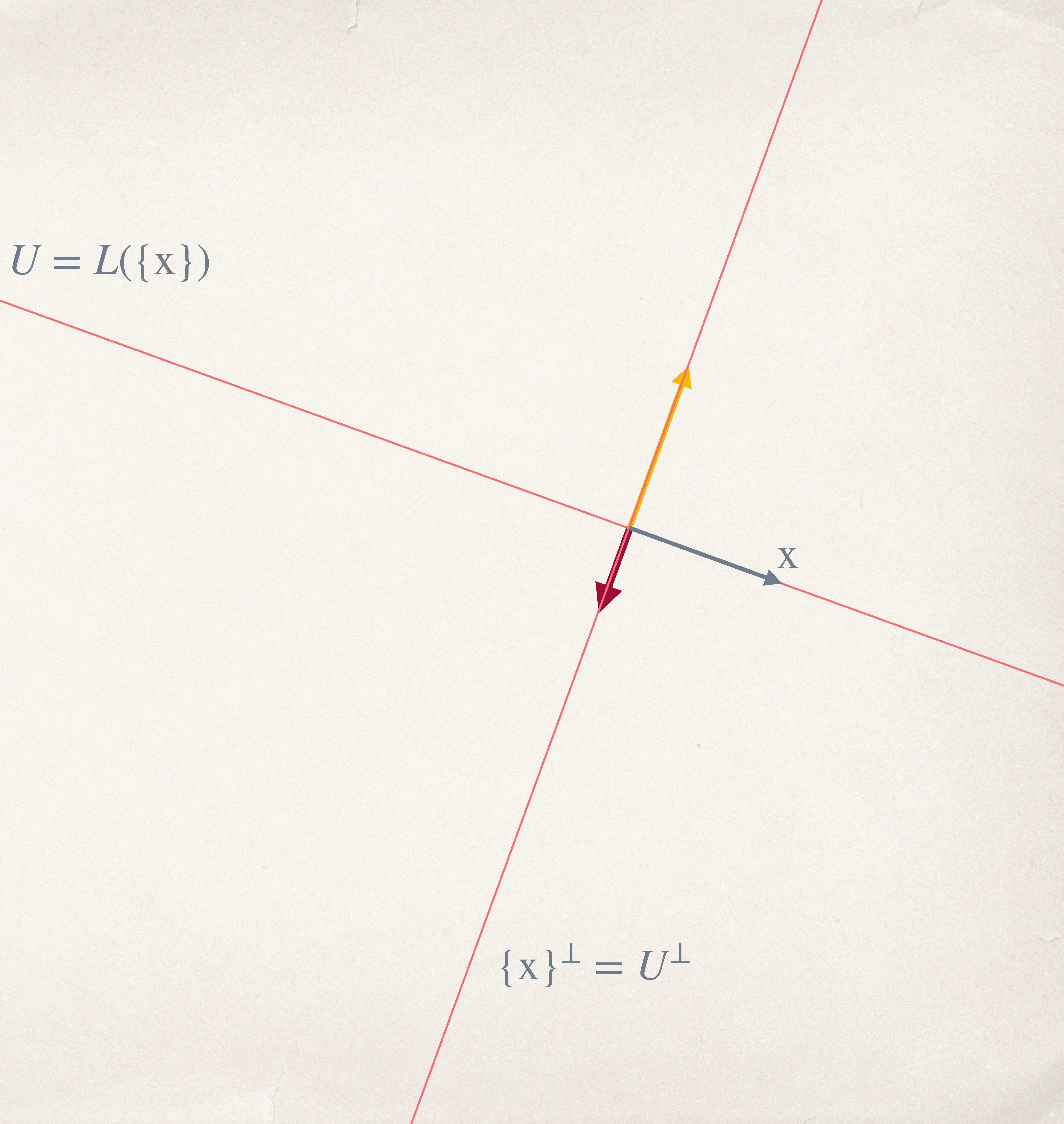
Complementos ortogonais

Se V é um espaço euclidiano e $X \subset V$ denotamos por $X^\perp$ o subconjunto de V que designamos de **complemento ortogonal de** X **em** V e que se define:

$$X^\perp = \{x \in V \mid x \perp X\}$$

onde, $x \perp X$ significa:

$$(\forall u \in X)\langle x, u\rangle = 0$$



Complementos ortogonais

Teorema.—*Tem-se que* $X^\perp = L_V(X)^\perp$, *ou seja, se* x *é ortogonal a todos os membros de* X *então* x *é ortogonal a qualquer combinação linear de elementos de* X.

Se $\{\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n\} = X$ e $\mathrm{x} \in X^\perp$ então $\langle \alpha_1 \mathrm{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{u}_n \rangle = \alpha_1 \langle \mathrm{u}_1, \mathrm{x} \rangle + \cdots + \alpha_n \langle \mathrm{u}_n, \mathrm{x} \rangle = 0$

Teorema.—*Se* W *é um subespaço de* V *e* $W = L_V(\{\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_k\})$ *então:*

$$W^\perp = \{\mathrm{x} \in V \mid \langle \mathrm{x}, \mathrm{w}_1 \rangle = 0 \wedge \cdots \wedge \langle \mathrm{x}, \mathrm{w}_n \rangle = 0\}.$$

Além disso tem-se que $X^{\perp\perp} = L_V(X)$. *Em particular, se* W *é um subespaço de* V *então* $W^{\perp\perp} = W$.

Exemplo 1

No espaço $\mathbb{R}^4$ considere o produto interno canónico. Determine o complemento ortogonal do subespaço $L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,1,0,0),(0,1,1,0)\})$,

O complemento ortogonal do subespaço indicado é definido por:

$$\{(x,y,z,w) \mid \langle (x,y,z,w),(1,1,0,0)\rangle = 0 \wedge \langle (x,y,z,w),(0,1,1,0)\rangle = 0\}$$

ou seja,

$$\{(x,y,z,w) \mid x+y=0 \wedge y+z=0\}$$

que é o núcleo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

No espaço $\mathbb{R}_2[t]$ dos polinómios de grau ≤ 2 considere o produto interno que relativamente à base canónica de $\mathbb{R}_2[t]$ é definido pela matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine

$$L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{1 - t, 1 + t^2\})^{\perp}$$

Exemplo 2 (cont.)

Visto que temos o produto interno representado matricialmente relativamente à base canónica de $\mathbb{R}_2[t]$ podemos fazer todos os cálculos em termos de coordenadas. As coordenadas dos vectores em

$$L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{1-t, 1+t^2\})^{\perp}$$

satisfazem:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Exemplo 2 (cont.)

ou seja, $x - 2y = 0$ e $x + 4z = 0$, ou seja, as coordenadas dos vectores no complemento ortogonal do espaço considerado são o elementos do subespaço:

$$\{(x, x/2, -x/4) \mid x \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, 1/2, -1/4)\}) = L_{\mathbb{R}^3}(\{(4, 2, -1)\})$$

o que significa que:

$$L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{1 - t, 1 + t^2\})^{\perp} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(4,2,-1)^B\}) = L_{\mathbb{R}_2[t]}(\{4 + 2t - t^2\})$$

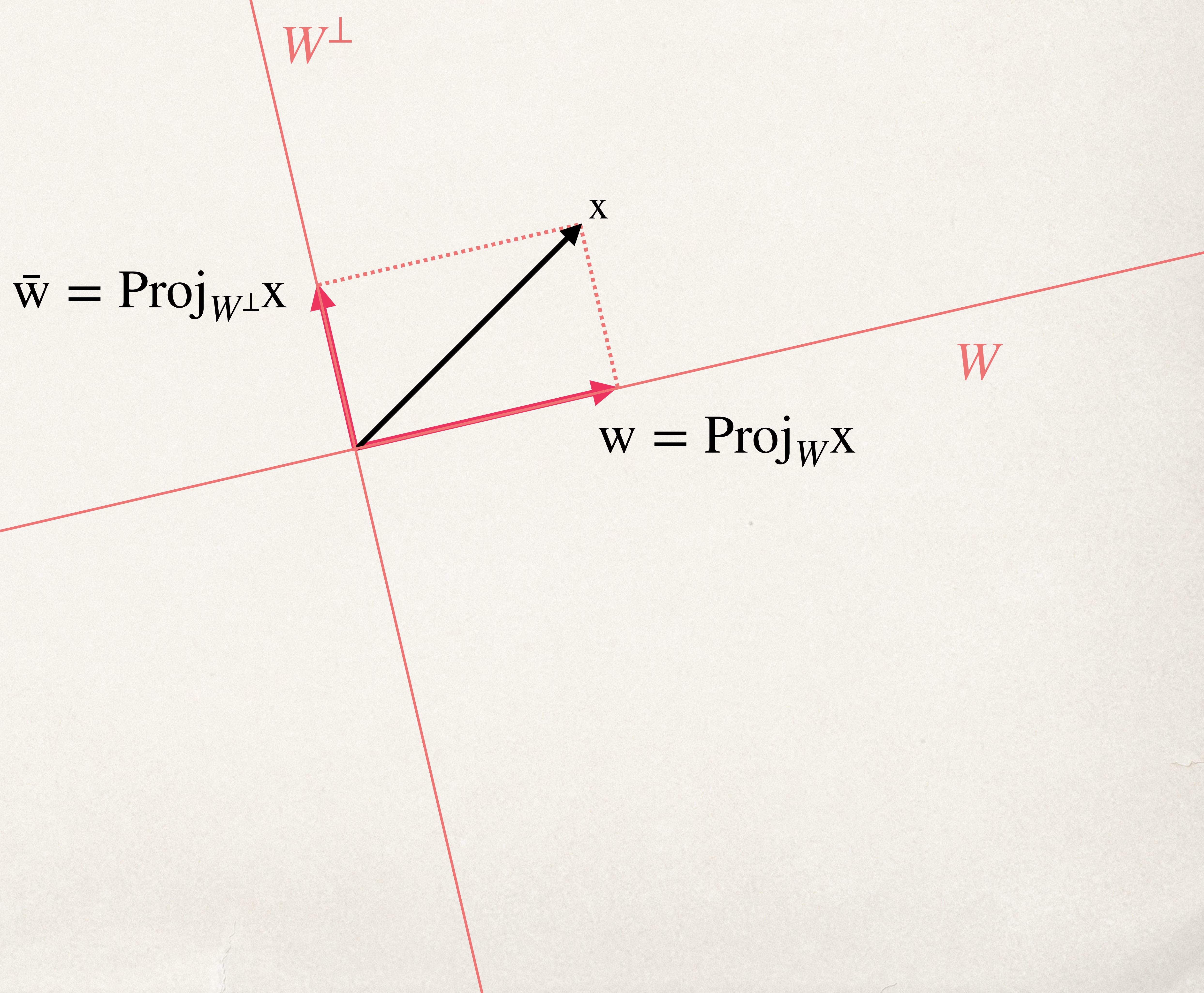
onde B é a base canónica de $\mathbb{R}_2[t]$.

Complementos ortogonais

Suponhamos que W é um subespaço do espaço euclidiano V. Dado $\mathrm{x} \in V$ existem $\mathrm{w} \in W$ e $\mathrm{w}_\perp \in W^\perp$ (**únicos**) tais que:

$$\mathrm{x} = \mathrm{w} + \mathrm{w}_\perp$$

Ou seja: $V = W \oplus W^\perp$.



Complementos ortogonais

Se W é um subespaço do espaço euclidiano V e $\mathrm{x} \in V$ então:

$$\mathrm{Proj}_W \mathrm{x} \in W \qquad \mathrm{Proj}_{W^\perp} \mathrm{x} \in W^\perp \qquad \mathrm{x} = \mathrm{Proj}_W \mathrm{x} + \mathrm{Proj}_{W^\perp} \mathrm{x}$$

Além disso, se $\mathrm{x} = \mathrm{w} + \bar{\mathrm{w}}$ onde $\mathrm{w} \in W$ e $\bar{\mathrm{w}} \in W^\perp$ então

$$\mathrm{w} = \mathrm{Proj}_W \mathrm{x} \qquad \bar{\mathrm{w}} = \mathrm{Proj}_{W^\perp} \mathrm{x}$$

Complementos ortogonais

Tem-se ainda que

$$\mathrm{Proj}_{W^{\perp}}\mathrm{x} = \mathrm{x} - \mathrm{Proj}_{W}\mathrm{x}$$

$$\mathrm{Proj}_{W}\mathrm{x} = \mathrm{x} - \mathrm{Proj}_{W^{\perp}}\mathrm{x}$$

Teorema.—*Se W é um subespaço do espaço euclidiano V, tem-se:*

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Além disso,

$$\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}.$$

Exemplo

Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno canónico. Seja $W = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,1,1,0),(1,1,1,1),(0,0,1,1)\})$.

1. Que vector constitui a melhor aproximação em W do vector $(1,2,3,1)$?
2. O vector $(1,-1,1,2)$ é elemento de W?
3. Qual a distância de $(1,2,3,1)$ a $W^{\perp}$?

É fácil ver que os vectores geradores de W constituem uma base de W. Assim $W^{\perp} = L_{\mathbb{R}^4}(\{\mathrm{v}\})$ para algum $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^4$. É, portanto preferível calcular projecções sobre $W^{\perp}$.

Exemplo (cont.)

Uma vez que estamos a considerar o p.i. canónico tem-se que

$$W^{\perp} = \mathrm{Nuc}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = L_{\mathbb{R}^4}(\{(1,-1,0,0)\})$$

Assim,

$$\mathrm{Proj}_{W^{\perp}}(1,2,3,1) = \frac{\langle (1,2,3,1),(1,-1,0,0)\rangle}{\langle (1,-1,0,0),(1,-1,0,0)\rangle}(1,-1,0,0) = -\frac{1}{2}(1,-1,0,0)$$

A melhor aproximação de $(1,2,3,1)$ em W é

$$\mathrm{Proj}_{W}(1,2,3,1) = (1,2,3,1) - \mathrm{Proj}_{W^{\perp}}(1,2,3,1) = (1,2,3,1) + \frac{1}{2}(1,-1,0,0)$$

Exemplo (cont.)

Tem-se que $(1,-1,1,2) \in W$ se e só se $\mathrm{Proj}_{W^\perp}(1,-1,1,2) = (0,0,0,0)$. Ou seja, se e só se $\langle (1,-1,2,1),(1,-1,0,0) \rangle = 0$. Como isto não acontece, resulta que $(1,-1,1,2) \notin W$.

Finalmente, $d((1,2,3,1), W^\perp) = \|\mathrm{Proj}_W(1,2,3,1)\|$ (porque $W^{\perp\perp} = W$).