Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula 21

Síntese de resultados

Um conjunto $X \subset V$ é **ortogonal** se para quaisquer $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in X$ com $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ se tem $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = 0$.

Um conjunto $X \subset V$ é **ortonormado** se é ortogonal e se para qualquer $\mathrm{x} \in X$ se tem $\|\mathrm{x}\| = 1$.

Se $X \subset V$ é ortogonal e não contém o vector nulo então X é um conjunto linearmente independente de vectores. (Em particular, se X é ortonormado então X é um conjunto linearmente independente de vectores.)

Síntese de resultados

Seja $\mathrm{x} \in L_V(X)$, onde $X = \{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k\}$ é ortogonal. Tem-se que:

$$\mathrm{x} = \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{v}_1 \rangle}{\|\mathrm{v}_1\|^2}\mathrm{v}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{v}_n \rangle}{\|\mathrm{v}_n\|^2}\mathrm{v}_n = \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{v}_1 \rangle}{\langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_1 \rangle}\mathrm{v}_1 + \cdots + \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{v}_n \rangle}{\langle \mathrm{v}_n, \mathrm{v}_n \rangle}\mathrm{v}_n$$

Seja $\mathrm{x} \in L_V(X)$, onde $X = \{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k\}$ é ortonormado. Tem-se que:

$$\mathrm{x} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{v}_1 \rangle \mathrm{v}_1 + \cdots + \langle \mathrm{x}, \mathrm{v}_n \rangle \mathrm{v}_n$$

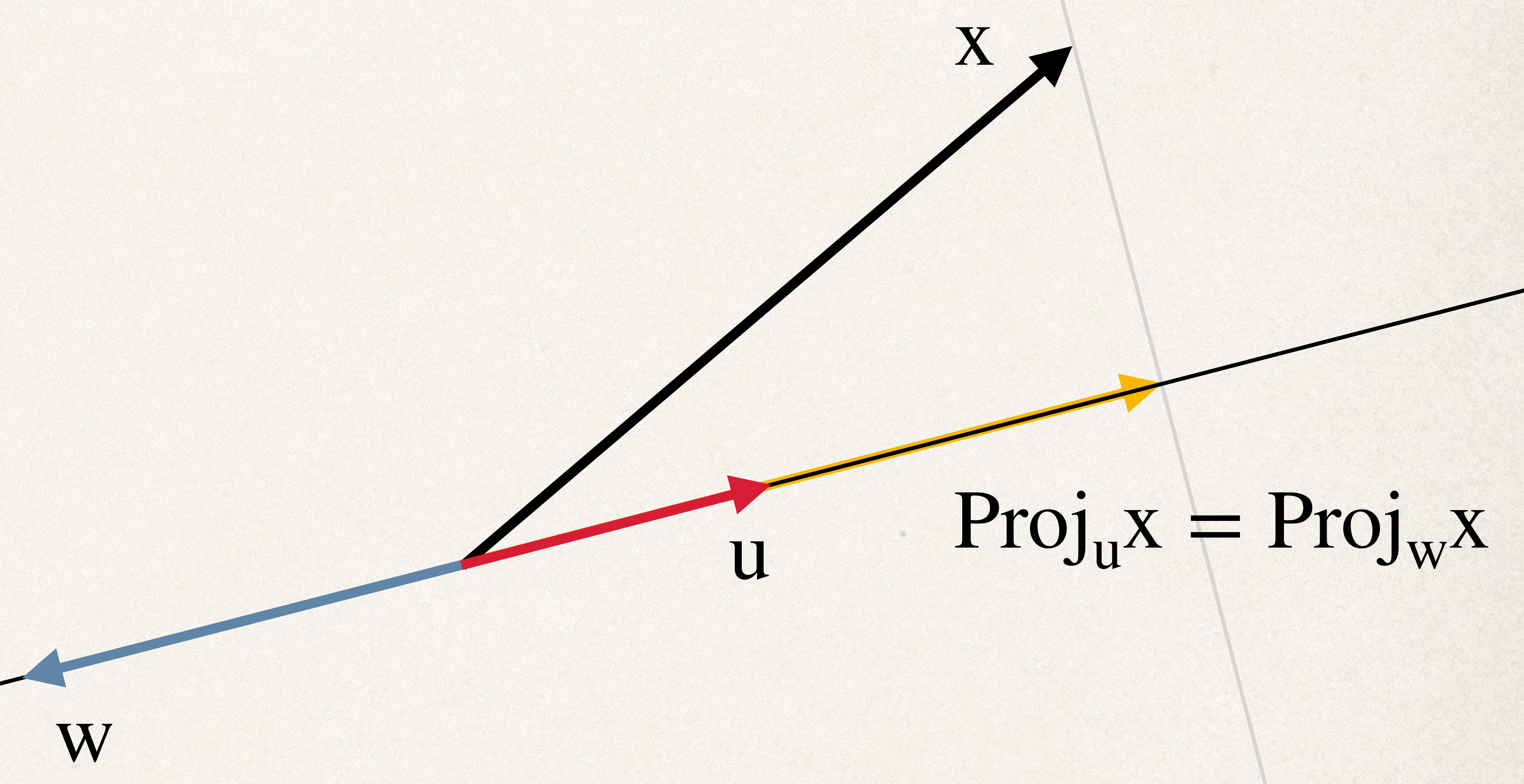
Síntese de resultados

Dados dois vectores $x, u \in V$ a **projecção ortogonal** de x sobre u define-se:

$$\mathrm{Proj}_u x = \frac{\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u = \frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2} u$$

Se $U = L_V(\{u\}) = L_V(\{w\})$ então, $\mathrm{Proj}_u x = \mathrm{Proj}_w x$.

Define-se então $\mathrm{Proj}_U x = \mathrm{Proj}_u x$



Síntese de resultados

No caso em que $\dim(U) > 1$, a projecção ortogonal de um vector sobre U calcula-se através da fórmula:

$$\mathrm{Proj}_U \mathrm{x} = \mathrm{Proj}_{\mathrm{v}_1} \mathrm{x} + \cdots + \mathrm{Proj}_{\mathrm{v}_n} \mathrm{x}$$

onde $\{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ **é uma base ortogonal de** U.

Nota: só se pode calcular $\mathrm{Proj}_U \mathrm{x}$ relativamente a uma (qualquer) base ortogonal de U.

Problema da melhor aproximação

Teorema.—Sejam, V um espaço euclidiano, W um subespaço de V e $\mathrm{x} \in V$. Para qualquer $\mathrm{w} \in W$ tem-se que:

$$\|\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W \mathrm{x}\| \leq \|\mathrm{x} - \mathrm{w}\|.$$

Ou seja, **a projecção ortogonal de** x **sobre** W **é o vector em** W **mais próximo de** x.

Definição.—Sejam, V um espaço euclidiano, W um subespaço de V e $\mathrm{x} \in V$. A distância de x a W que se denota $d(\mathrm{x}, W)$ é:

$$d(\mathrm{x}, W) := \|\mathrm{x} - \mathrm{Proj}_W \mathrm{x}\| = d(\mathrm{x}, \mathrm{Proj}_W \mathrm{x}).$$

O método de ortogonalização de Gram-Schmidt permite obter uma base ortogonal de um espaço a partir de um conjunto gerador desse espaço.

Teorema (método de ortogonalização de Gram-Schmidt).—Seja $W = L_V(\{u_1, \ldots, u_k\})$. Consideremos os vectores $u_1^*, \ldots, u_k^*$ definidos da seguinte forma:

$$u_1^* = u_1$$

$$u_{i+1}^* = u_{i+1} - \mathrm{Proj}_{L_V(\{u_1^*, \ldots, u_i^*\})}(u_{i+1})$$

Nestas condições, o conjunto $X = \{u_1^*, \ldots, u_k^*\} \setminus \{\mathbb{O}\}$ é uma base ortogonal de W.

Como consequência imediata do teorema anterior tem-se:

Teorema.—Todo o espaço euclidiano possui uma base ortogonal (e uma base ortonormada).

Todo o espaço euclidiano tem uma base $B = \{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n\}$. Usando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, podemos obter a partir de B, uma base ortogonal $\bar{B} = \{\mathrm{v}_1^*, \ldots, \mathrm{v}_n^*\}$. Normalizando cada um dos v_i^* ou seja, considerando

$$\mathrm{v}_i^+ = \frac{1}{\|\mathrm{v}_i^*\|}\mathrm{v}_i^*$$

obtemos uma base $\tilde{B} = \{\mathrm{v}_1^+, \ldots, \mathrm{v}_n^+\}$ que é ortonormada.

Exemplo

Seja $U = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^3$, onde se considera o produto interno canónico.

1. Calcular $P_U(1,1,1)$.
2. Estender uma base de U a uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Para calcular $\mathrm{Proj}_U(1,1,1)$ precisamos de uma base ortogonal para U.

$$U = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\} = \{(x, y, -x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1,0,-1), (0,1,1)\})$$

Como a base obtida não é ortogonal, recorremos ao método de Gram-Schmidt para obter uma base ortogonal para U.

$$\mathrm{u}_1 = (1,0,-1) \qquad \mathrm{u}_1^* = (1,0,-1)$$

$$\mathrm{u}_2 = (0,1,1) \qquad \mathrm{u}_2^* = \mathrm{u}_2 - \mathrm{Proj}_{\mathrm{u}_1^*}\mathrm{u}_2 = (0,1,1) - \frac{\langle(0,1,1),(1,0,-1)\rangle}{\langle(1,0,-1),(1,0,-1)\rangle}(1,0,-1) = (1/2,1,1/2)$$

Em vez do vector $(1/2,1,1/2)$ **podemos considerar o vector** $(1,2,1)$ **porque tem a mesma direcção.**

Uma base ortogonal para U é então, $B = \{(1,0,-1), (1,2,1)\}$.

Podemos agora calcular a projecção $\text{Proj}_U(1,1,1)$:

$$\text{Proj}_U(1,1,1) = \text{Proj}_{(1,0,-1)}(1,1,1) + \text{Proj}_{(1,2,1)}(1,1,1) =$$

$$= \frac{\langle (1,1,1), (1,0,-1) \rangle}{\langle (1,0,-1), (1,0,-1) \rangle}(1,0,-1) + \frac{\langle (1,1,1), (1,2,1) \rangle}{\langle (1,2,1), (1,2,1) \rangle}(1,2,1)$$

Já dispomos de uma base ortogonal para U e.g., $B = \{(1,0,-1),(1,2,1)\}$. Para a completar de modo a obter uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ basta adicionar-lhe um vector que seja ortogonal a todos os elementos de B.

Observação interessante.—Se em $\mathbb{R}^n$ considerarmos o produto interno canónico então se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ então, os vectores $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ que são ortogonais a todas as linhas de A são precisamente os elementos do núcleo de A. Isto porque:

$$A\mathrm{x} = \begin{bmatrix} \langle A_{1,*}, \mathrm{x}\rangle \\ \vdots \\ \langle A_{m,*}, \mathrm{x}\rangle \end{bmatrix}$$

Procuramos então um elemento do $\mathrm{Nuc}(A)$ onde A é a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tem-se que:

$$\mathrm{Nuc}(A) = \{(x, y, z) \mid x - z = 0 \wedge x + 2y + z = 0\} = L_{\mathbb{R}^3}(\{(1, -1, 1)\})$$

Pelo que, $\bar{B} = \{(1,0,-1), (1,2,1), (1,-1,1)\}$ é a base pretendida.

Propriedades básicas de uma projecção ortogonal

$\mathrm{Proj}_U : V \to V$ é uma transformação linear ou seja, $\mathrm{Proj}_U(\alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y}) = \alpha \mathrm{Proj}_U \mathrm{x} + \beta \mathrm{Proj}_U \mathrm{y}$.

O núcleo de Proj_U consiste nos vectores $\mathrm{x} \in V$ que são ortogonais a qualquer elemento de U i.e.,

$$\mathrm{Nuc}(\mathrm{Proj}_U) = \{\mathrm{x} \mid (\forall \mathrm{u} \in U)\langle \mathrm{x}, \mathrm{u} \rangle = 0\}$$

A imagem de Proj_U é U.
Além disso, se $\mathrm{x} \in U$ então, $\mathrm{Proj}_U \mathrm{x} = \mathrm{x}$ e assim, $\mathrm{Proj}_U(\mathrm{Proj}_U \mathrm{x}) = \mathrm{Proj}_U \mathrm{x}$.