Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula **20**

Problema 7.5.— Sejam, $\boldsymbol{B} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores de $\mathbb{R}^3$.

Para cada uma das expressões seguintes determine a matriz $\boldsymbol{G} = [\langle \mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j \rangle]$, e deduza se essas expressões se podem escrever na forma matricial $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = \mathrm{u}^\top \boldsymbol{G} \mathrm{v}$.

Com base nestes cálculos justifique quais das expressões definem um produto interno em $\mathbb{R}^3$ e nos restantes casos indique as propriedades da definição de produto interno que falham.

(a) $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = u_1 v_1 + u_3 v_3$;

(b) $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = 2u_1 v_1 + u_2 v_2 + 2u_3 v_3$;

(c) $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = 2u_1 v_1 + u_2 v_2 + 4u_3 v_3$;

(d) $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2 + u_3 v_3$;

(e) $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2$.

Ortogonalidade

Definição.—*Sejam, V um espaço euclidiano e* $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in V$. *Dizemos que* x *e* y *são* ***ortogonais*** *se* $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = 0$. *Neste caso escrevemos* $\mathrm{x} \perp \mathrm{y}$.

Definição.—*Dizemos que $X \subset V$ é um* ***conjunto ortogonal*** *se* $\mathrm{x} \perp \mathrm{y}$ *para quaisquer* $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ *em X.*

Definição.—*Dizemos que $X \subset V$ é um* ***conjunto ortonormado*** *se for ortogonal e qualquer $x \in X$ é unitário i.e.* $\|\mathrm{x}\| = 1$, *qualquer que seja* $\mathrm{x} \in X$.

Observações

Observação 1.—Um conjunto X é ortonormado se e só se $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \delta_{\mathrm{x},\mathrm{y}}$, para quaisquer $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in X$. Onde,

$$\delta_{\mathrm{x},\mathrm{y}} = \begin{cases} 1 & (\text{se } \mathrm{x} = \mathrm{y}) \\ 0 & (\text{se } \mathrm{x} \neq \mathrm{y}) \end{cases}.$$

Observação 2.—No caso do produto interno canónico (em$\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) dois vectores x, y são ortogonais se e só se são perpendiculares entre si.

Observação 3.—Relativamente ao produto interno canónico as bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ são conjuntos ortonormados de vectores.

Teorema.—*Seja V um espaço linear. Se $X = \{v_1, \ldots, v_k\}$ é* ***ortogonal e o vector nulo não é membro de*** *X, então X é* ***linearmente independente.***

A ortogonalidade é uma forma forte de independência linear

Coordenadas de um vector relativamente a uma base ortogonal

Teorema.—*Sejam V um espaço euclidiano e $X = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ um* ***conjunto ortogonal que não inclui o vector nulo****. Considere-se $x \in L_V(X)$, tem-se que:*

$$x = \frac{\langle x, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \cdots + \frac{\langle x, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k = \frac{\langle x, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \cdots + \frac{\langle x, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k$$

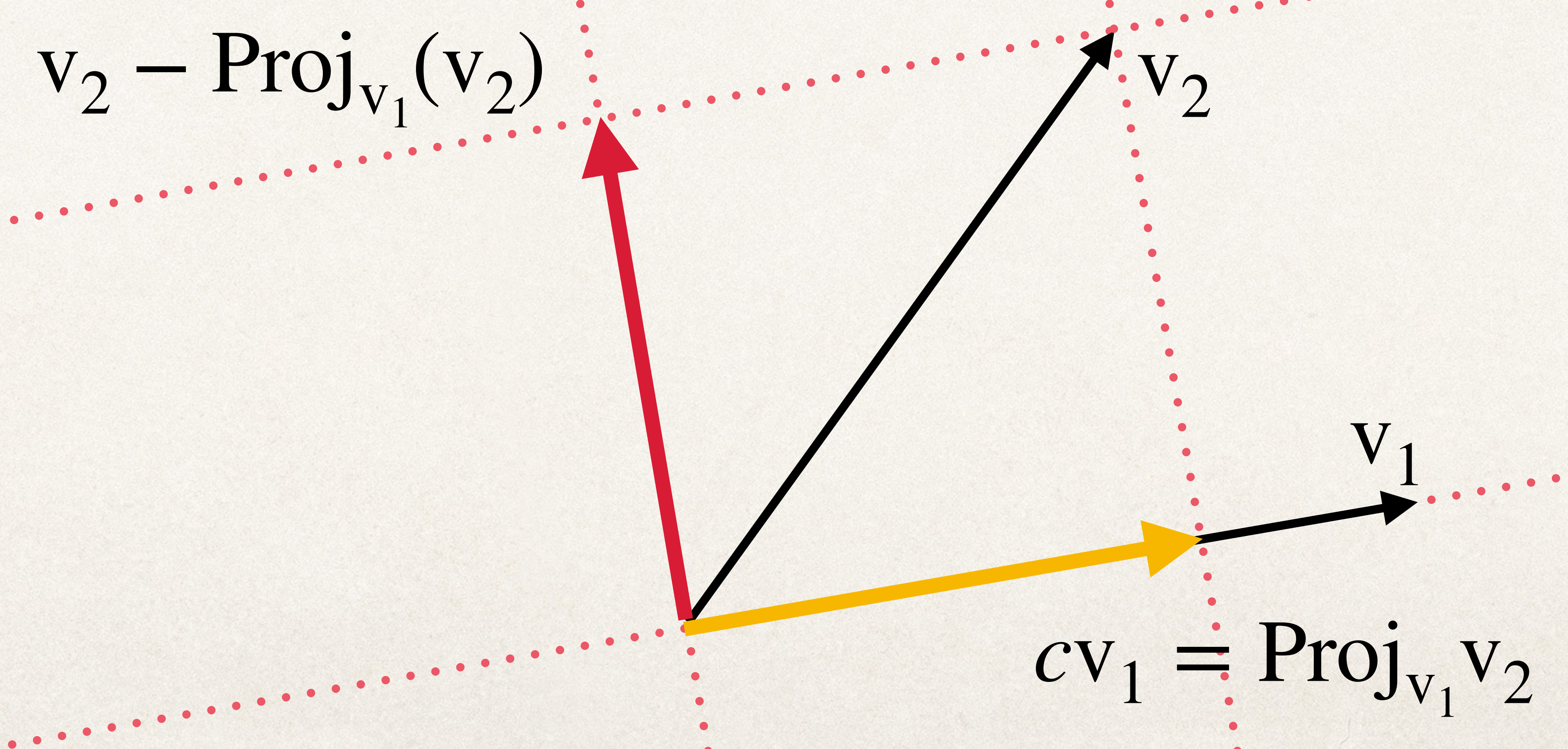
Corolário.—*Se $X = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ é um conjunto ortonormado então, para $x \in L_V(X)$ tem-se que:*

$$x = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle x, v_k \rangle v_k$$

Bases ortogonais. Método de Gram-Schmidt

Problema.—*Se* $\{v_1, v_2\}$ *é um conjunto linearmente independente, existirá um conjunto ortogonal que seja uma base de* $L_V(\{v_1, v_2\})$*?*

Considerando $\mathbb{R}^2$, a figura sugere uma possibilidade:



Bases ortogonais. Método de Gram-Schmidt

Procuramos c tal que $\langle \mathrm{v}_2 - c\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_1 \rangle = 0$. Tem-se:

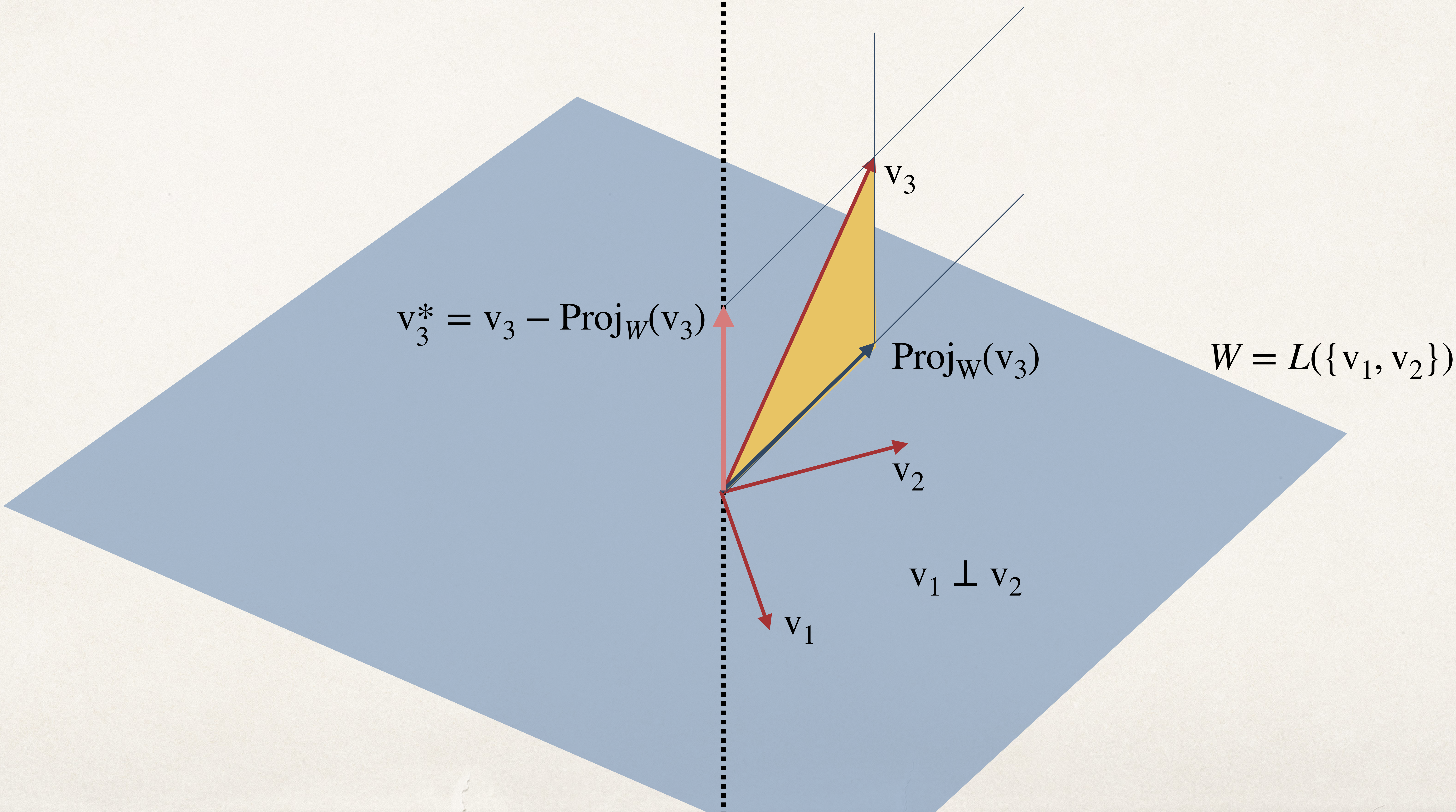
$$0 = \langle \mathrm{v}_2 - c\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_1 \rangle = \langle \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_1 \rangle - c\langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_1 \rangle \Leftrightarrow c = \frac{\langle \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_1 \rangle}{\langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_1 \rangle}$$

Desta forma:

$$\mathrm{Proj}_{\mathrm{v}_1}(\mathrm{v}_2) = \frac{\langle \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_1 \rangle}{\langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_1 \rangle}\mathrm{v}_1$$

Assim, $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 - \mathrm{Proj}_{\mathrm{v}_1}(\mathrm{v}_2)\}$ é uma base ortogonal de $L_V(\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\})$.

No caso geral (continuando a depender da intuição geométrica) o procedimento é recorrente:



Projecções ortogonais

Definição.—*A projecção ortogonal de um vector* x *sobre um vector* w *que se denota* $\mathrm{Proj}_{\mathrm{w}}(\mathrm{x})$ *é:*

$$\mathrm{Proj}_{\mathrm{w}}(\mathrm{x}) = \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{w} \rangle}{\langle \mathrm{w}, \mathrm{w} \rangle}\mathrm{w} = \frac{\langle \mathrm{x}, \mathrm{w} \rangle}{\|\mathrm{w}\|^2}\mathrm{w}$$

Se $W = L(\{\mathrm{w}\})$ então, definimos $\mathrm{Proj}_W(\mathrm{x}) = \mathrm{Proj}_{\mathrm{w}}(\mathrm{x})$. Note-se que esta definição faz sentido visto que se $W = L(\{\mathrm{w}\}) = L(\{\mathrm{u}\})$ então $\mathrm{Proj}_{\mathrm{w}}(\mathrm{x}) = \mathrm{Proj}_{\mathrm{u}}(\mathrm{x})$.

$$\mathrm{Proj}_{\alpha\mathrm{w}}(\mathrm{x}) = \frac{\langle \mathrm{x}, \alpha\mathrm{w} \rangle}{\|\alpha\mathrm{w}\|^2}(\alpha\mathrm{w}) = \frac{\alpha^2\langle \mathrm{x}, \mathrm{w} \rangle}{\alpha^2\|\mathrm{w}\|^2}\mathrm{w} = \mathrm{Proj}_{\mathrm{w}}(\mathrm{x})$$

Mas, como definir $\mathrm{Proj}_W(\mathrm{x})$ no caso em que $\dim(W) > 1$ e.g., no caso em $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$ é uma base de W?

A solução aparentemente óbvia:

$$\mathrm{Proj}_W(\mathrm{x}) = \mathrm{Proj}_{\mathrm{v}_1}(\mathrm{x}) + \mathrm{Proj}_{\mathrm{v}_2}(\mathrm{x})$$

não funciona (em geral)!!

Se x pertence ao plano W gerado por v_1 ev_2 a intuição geométrica diz que $x = \mathrm{Proj}_W(x)$, no entanto:

Mas as coisas funcionam bem se $v_1 \perp v_2$:

Definição.—*Se* $\{v_1, \ldots, v_k\}$ *é um abase ortogonal de* W *então definimos:*

$$\mathrm{Proj}_W(x) = \mathrm{Proj}_{v_1}(x) + \cdots + \mathrm{Proj}_{v_k}(x)$$

A definição anterior é correcta pois é possível mostrar que se $\{u_1, \ldots, u_k\}$ é uma outra base ortogonal de W então $\mathrm{Proj}_{v_1}(x) + \cdots + \mathrm{Proj}_{v_k}(x) = \mathrm{Proj}_{u_1}(x) + \cdots + \mathrm{Proj}_{u_k}(x)$.

Para podermos calcular $\mathrm{Proj}_W(x)$ *necessitamos de obter primeiro uma base ortogonal para* W.

Método de ortogonalização de Gram-Schmidt

Teorema (método de ortogonalização de Gram-Schmidt).—Seja $W = L_V(\{u_1, \ldots, u_k\})$. Consideremos os vectores $u_1^*, \ldots, u_k^*$ definidos da seguinte forma:

$$u_1^* = u_1$$

$$u_{i+1}^* = u_{i+1} - \operatorname{Proj}_{L_V(\{u_1^*, \ldots, u_i^*\})}(u_{i+1})$$

Nestas condições, o conjunto $X = \{u_1^*, \ldots, u_k^*\} \backslash \{\mathbb{O}\}$ é uma base ortogonal de W.

Exemplo 1

Se em $\mathbb{R}^2$ considerarmos o produto interno canónico e a base canónica $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2)$ onde $\mathrm{e}_1 = (1,0)$ e $\mathrm{e}_2 = (0,1)$ então,

$$G_{\boldsymbol{\beta}} \begin{bmatrix} \langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_1 \rangle & \langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \rangle \\ \langle \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_1 \rangle & \langle \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tem-se:

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$