Álgebra Linear

Primeiro semestre

2021–2022

Aula 16

Definição.—*Uma transformação linear $T : V \to V$ diz-se um* ***operador*** *em V.*

Definição.—*Consideremos $T : V \to V$ um operador em V. Dizemos que T é* ***diagonalizável*** *se existe uma base ordenada, $\boldsymbol{\beta}$, de V, relativamente à qual $[T]_{\boldsymbol{\beta}}$ é uma matriz diagonal. Uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ é diagonalizável se o operador T_A for diagonalizável.*

Recorde-se que $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ se define $T_A(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$.

Se um operador T em V possui uma representação diagonal numa base $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$ de V, digamos que:

$$[T]_{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

então, $T(\mathrm{v}_1) = \lambda_1 \mathrm{v}_1$, $T(\mathrm{v}_2) = \lambda_2 \mathrm{v}_2$, . . . , $T(\mathrm{v}_n) = \lambda_n \mathrm{v}_n$.

Valores próprios e o espectro de T

Definição.—*Seja T um operador em V. Um* **valor próprio** *de T é um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ para o qual existe um vector não-nulo $\mathrm{x} \in V$ tal que $T(\mathrm{x}) = \lambda \mathrm{x}$. Se $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, um valor próprio de A é um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ para o qual existe um um vector não-nulo $\mathrm{x} \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ tal que $A\mathrm{x} = \lambda \mathrm{x}$, ou seja, é um valor próprio de T_A.*

Definição.—*Seja T um operador em V. O conjunto dos valores próprios de T denota-se por $\Lambda(T)$ e designa-se de* **espectro de** *T. O conjunto dos valores próprios de A denota-se por $\Lambda(A)$ e designa-se de* **espectro de** *A.*

Valores próprios e o espectro de T

Teorema.—*Sejam, T um operador em V, $\boldsymbol{\beta}$ uma base de V e $A = [T]_{\boldsymbol{\beta}}$. Tem-se que λ é um valor próprio de T se e só se é um valor próprio de A. (Ou seja $\Lambda(T) = \Lambda(A)$.)*

Se $\boldsymbol{\beta}_c$ é a base canónica de $\mathbb{K}^n$, recorde-se que $A = [T_A]_{\boldsymbol{\beta}_c}$.

Exemplo 1

Consideremos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

tem-se que:

$$A\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\mathrm{v}_1 \text{ e } A\mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5\mathrm{v}_2,$$

assim $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$ são valores próprios de A.

Tendo em conta que A representa T_A na base canónica $\boldsymbol{\beta}_c$ de $\mathbb{R}^2$ e que na base $\boldsymbol{\beta} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$ se tem:

$$[T_A]_{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

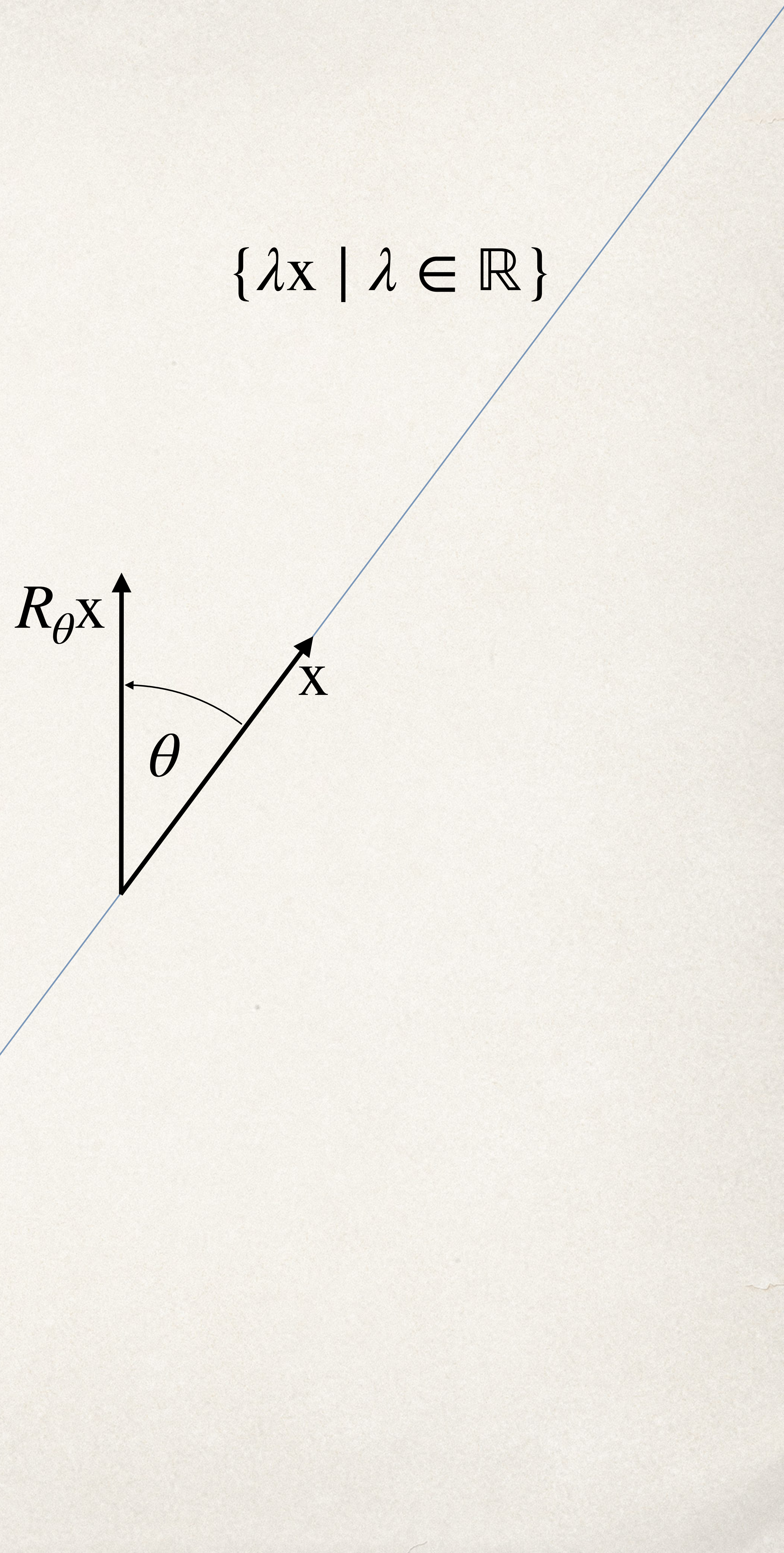
resulta que

$$A = [T_A]_{\beta_c} = [\beta_c, \beta][T_A]_{\beta}[\beta_c, \beta]^{-1}$$

ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

Exemplo 2



Se considerarmos o plano $\mathbb{R}^2$ uma rotação de ângulo θ em torno da origem é a transformação que relativamente à base canónica é representada pela matriz

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Se $\theta = 0$ então $R = \mathbb{I}$. Caso contrário, para nenhum vector não-nulo, x, se tem $R_\theta x = \lambda x$. Assim, R_θ não possui valores próprios (reais), para $\theta \neq 0$.

Vectores próprios

Definição.—*Se T é um operador em V (resp. se $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$) e λ é um valor próprio de T (resp. de A), denotamos por $E_T(\lambda)$ (resp. $E_A(\lambda)$) o conjunto de todos os vectores $\mathrm{x} \in V$ tais que $T(\mathrm{x}) = \lambda \mathrm{x}$ (resp. $\mathrm{x} \in \mathbb{K}^n$ tais que $A\mathrm{x} = \lambda \mathrm{x}$. Os elementos de $E_T(\lambda)$ designam-se de* ***vectores próprios de T associados ao valor próprio λ*** *(resp.* ***vectores próprios de A, associados ao valor próprio λ****).*

Vectores próprios

Teorema.—*Sejam, T um operador em V (resp. uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$) e λ um valor próprio de T (resp. de A). Tem-se que $E_T(\lambda)$ é um subespaço de V (resp. $E_A(\lambda)$ é um subespaço de $\mathbb{K}^n$). Além disso $\dim(E_T(\lambda)) \geq 1$ (resp. $\dim(E_A(\lambda)) \geq 1$).*

Resultado fundamental

Teorema.—*Seja T um operador em V (resp. $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$). Temos que T é diagonalizável (resp. A é diagonalizável) se e só se existe uma base de vectores próprios de T (resp. de A).*
Se A é diagonalizável então, $A = MDM^{-1}$ onde $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ e a matriz M é tal que para $1 \leq i \leq n$ se tem que a i-ésima coluna de M é um vector de $E_A(\lambda_i)$.

Temos assim dois problemas para resolver: **em primeiro lugar**, temos que ser capazes de determinar os valores próprios de T; **em segundo lugar**, temos que ser capazes de determinar os respectivos espaços próprios e a partir da sua composição obter uma base de vectores próprios.

Primeiro problema: determinar os valores próprios de um operador

Teorema.—*Se T é um operador em V e $\boldsymbol{\beta}$ é uma base de V então λ é valor próprio de T se e só se λ é um valor próprio de $[T]_{\boldsymbol{\beta}}$. Além disso, se $\lambda \in \Lambda(T) = \lambda([T]_{\boldsymbol{\beta}})$ então, tem-se que*

$$E_T(\lambda) = \mathrm{Nuc}(T - \lambda\mathbb{I}) = \mathrm{Nuc}(A - \lambda\mathbb{I})^{\boldsymbol{\beta}} = E_A(\lambda)^{\boldsymbol{\beta}}$$

ou seja, os vectores próprios de T associados a λ são os vectores cujos vectores de coordenadas na base $\boldsymbol{\beta}$ são vectores próprios de $[T]_{\boldsymbol{\beta}}$ associados a λ.

Conclusão: ***se soubermos resolver o problema da representação diagonal para matrizes, sabemos como resolvê-lo para operadores em geral!***

Primeiro problema: determinar os valores próprios de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Recordemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um valor próprio de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se e só se existe x não-nulo tal que $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$. Ou seja, se e só se existe x não-nulo tal que $(A - \lambda\mathbb{I})\mathrm{x} = \mathbb{O}$. Tem-se então que $\lambda \in \Lambda(A)$ se e só se $\mathrm{Nuc}(A - \lambda\mathbb{I})$ é não trivial ou, o que é equivalente, se e só se $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$.

Definição.—*Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. O **polinómio característico de** A, que se denota por $c_A(t)$ é o polinómio que se define através de* $c_A(t) = \det(A - t\mathbb{I})$.

Primeiro problema: determinar os valores próprios de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Teorema.—*Sejam T um operador em V e $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ bases de V. Supondo que $A = [T]_{\boldsymbol{\beta}_1}$ e $B = [T]_{\boldsymbol{\beta}_2}$ então, $c_A(t) = c_B(t)$.*

Definição.—*Seja T um oprador em V. O* ***polinómio característico de T****, que se denota por $c_T(t)$ é o polinómio característico de uma qualquer das suas representações matriciais.*

Teorema.—*Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ uma matriz. Tem-se que:*

1. $c_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$
2. $c_A(0) = \det(A)$
3. Os valores próprios de A são as raízes de $c_A(t)$.